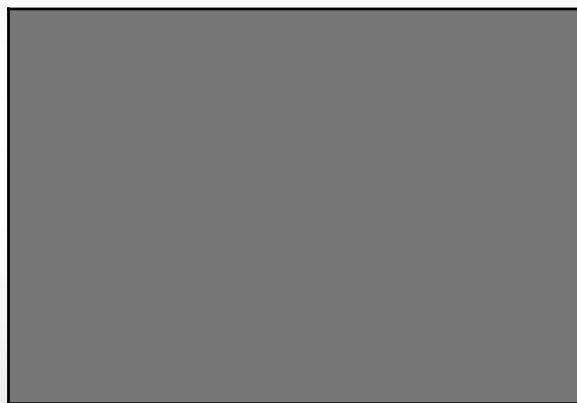


Józef Beluch
Akademia Górniczo-Hutnicza
w Krakowie

Wpływ wag współrzędnych na wyniki transformacji Helmerta

1. Wzór na transformację współrzędnych sposobem Helmerta:



(1)

2. Dwa modele wyznaczenia parametrów transformacji

I. Model pierwszy

W oparciu o wzór (1) tworzone są równania warunkowe z niewiadomymi [1]



(2)

Forma macierzowa



(3)

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} -b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & -b_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_0 & -b_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 - \bar{x}_1 - 1 & 0 \\ -\bar{x}_1 - \bar{y}_1 & 0 - 1 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \bar{y}_n - \bar{x}_n - 1 & 0 \\ -\bar{x}_n - \bar{y}_n & 0 - 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - (c_0 + b_0 \bar{x}_1 - a_0 \bar{y}_1) \\ \bar{Y}_1 - (d_0 + a_0 \bar{x}_1 + b_0 \bar{y}_1) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \bar{X}_n - (c_0 + b_0 \bar{x}_n - a_0 \bar{y}_n) \\ \bar{Y}_n - (d_0 + a_0 \bar{x}_n + b_0 \bar{y}_n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{V}_{\bar{W}_w} = [v_{\bar{X}_i} \ v_{\bar{Y}_i} \ \cdots \ v_{\bar{X}_n} \ v_{\bar{Y}_n}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_{\bar{W}_p} = [v_{\bar{x}_i} \ v_{\bar{y}_i} \ \cdots \ v_{\bar{x}_n} \ v_{\bar{y}_n}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{X} = [da \ db \ dc \ dd]^T \quad (7)$$

$\bar{X}_i, \bar{Y}_i$ - współrzędne wtórne punktów dostosowania,

$\bar{x}_i, \bar{y}_i$ - współrzędne pierwotne punktów dostosowania.

W wyniku rozwiązania układu (3) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów otrzymamy

$$\mathbf{X} = -[\mathbf{A}^T (\mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T)^{-1} \mathbf{A}^T] \mathbf{A}^T (\mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T)^{-1} \mathbf{L} \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}) \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\bar{W}_w} \\ \mathbf{V}_{\bar{W}_p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{W}_w} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{\bar{W}_p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{K} \quad (10)$$

gdzie



$$\quad (11)$$

$$\quad (12)$$

$\mathbf{P}_{\bar{W}_w}$, $\mathbf{P}_{\bar{W}_p}$ - macierze wagowe współrzędnych punktów dostosowania $\bar{X}$, $\bar{Y}$ w układzie wtórnym oraz $\bar{x}$, $\bar{y}$ w układzie pierwotnym,

$\mathbf{C}_{\bar{W}_w}$, $\mathbf{C}_{\bar{W}_p}$ - macierze wariancyjno-kowariancyjne współrzędnych punktów dostosowania,

$\mathbf{K}$ - macierz korelat.

II. Model drugi



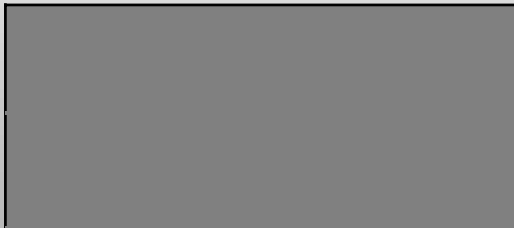
(13)

$i = 1, 2, \dots, n$

gdzie

n – liczba punktów dostosowania,

$\bar{X}_i^t, \bar{Y}_i^t$ - współrzędne wtórne punktów dostosowania wyliczone wzorami (1) po wyznaczeniu parametrów a, b, c, d .



Forma macierzowa przekształconych wzorów (13):

[illegible]

gdzie:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{\bar{X}_1} \\ V_{\bar{Y}_1} \\ \vdots \\ V_{\bar{X}_n} \\ V_{\bar{Y}_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\bar{y}_1 & \bar{x}_1 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 0 & 1 \\ \\ -\bar{y}_n & \bar{x}_n & 1 & 0 \\ \bar{x}_n & \bar{y}_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{W}}_w = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \\ \bar{Y}_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

Zwykle



(16)

$\mathbf{E}$ – macierz jednostkowa

Można wprowadzić

$$\mathbf{P}_{\overline{\mathbf{W}}_w} = \text{diag} \left[m_{\overline{X}_1}^2 \ m_{\overline{Y}_1}^2 \ \dots \ m_{\overline{X}_n}^2 \ m_{\overline{Y}_n}^2 \right]^{-1} \quad (17)$$

wówczas

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\overline{\mathbf{W}}_w} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\overline{\mathbf{W}}_w} \overline{\mathbf{W}}_w \quad (18)$$

3. Warianty obliczeń

Wyróżnimy dwa modele funkcjonalne:

I – z wykorzystaniem równań warunkowych z niewiadomymi,

II – z wykorzystaniem równań poprawek.

W zbiorze współrzędnych punktów dostosowania wydzielamy:

- dwa podzbiory W_{w1} i W_{w2} w układzie wtórnym,

- dwa podzbiory W_{p1} i W_{p2} w układzie pierwotnym.

Zróżnicowanie średnich błędów współrzędnych pomiędzy podzbiorami



(19)

n – wielokrotność błędu średniego m ,

$|m|$ - moduł błędu średniego

Warianty obliczeń zestawione w tabeli 1.

Tabela 1

Lp.	Model funkcjonalny	Wariant	Średnie błędy współrzędnych punktów dostosowania w układach			
			m_{w1} wtórnym	m_{w2}	m_{w1} pierwotnym	m_{w2}
1	2	3	4	5	6	7
1	I	1	m	m	m	m
2		2/A	2m	2m	m	m
3		2/B	m	2m	0,5m	m
4		2/C	2m	m	m	0,5m
5		2/D	m	3m	0,33m	m
6		2/E	3m	m	m	0,33m
7		3/A	m	m	2m	2m
8		3/B	0,5m	m	m	2m
9		3/C	m	0,5m	2m	m
10		3/D	0,33m	m	m	3m
11		3/E	m	0,33m	3m	m
12		2/B/1	m	2m	0,33m	0,5m
13		2/C/1	2m	m	0,5m	0,33m
14		2/D/1	m	3m	2m	4m
15		2/E/1	3m	m	4m	2m
16	II	4	m	m	-	-
17		4/B	m	2m	-	-
18		4/C	2m	m	-	-
19		4/D	m	3m	-	-
20		4/E	3m	m	-	-
21		5/B	0,5m	m	-	-
22		5/C	m	0,5 m	-	-
23		5/D	0,33m	m	-	-
24		5/E	m	0,33m	-	-

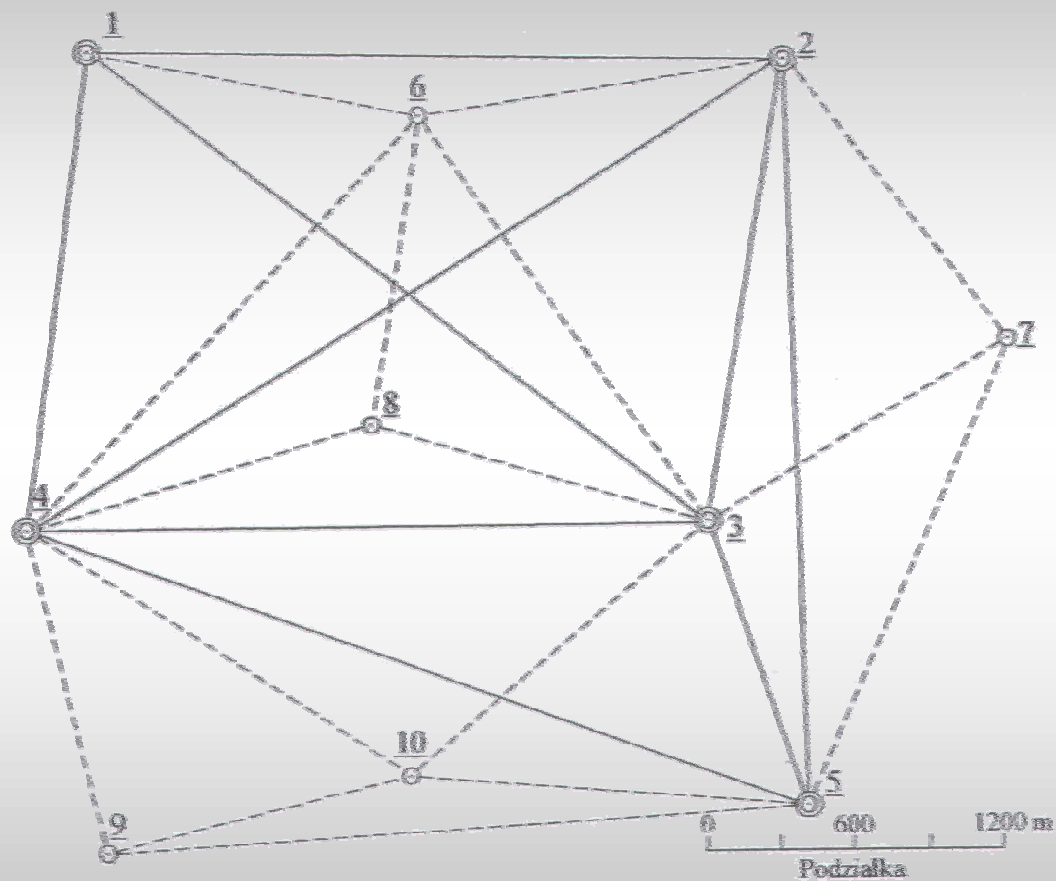
Podzbiory punktów dostosowania:



z wyjątkiem wariantów $12 \div 15$ w których:



4. Szkic sieci punktów



- ⊙ - punkty dostosowania,
- ◻ - punkty o współrzędnych w układzie pierwotnym.

5. Różnice parametrów transformacji pomiędzy wariantami obliczeń

Tabela 2

Lp.	Oznaczn. różnic	Różnice parametrów transformacji między wariantami					
1	2	3	4	5	6	7	8
1		1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2		1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3		1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4			1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	δa	0	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$-25,8 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$-40,4 \cdot 10^{-3}$	
6	δb	0	$-27,6 \cdot 10^{-3}$	$29,9 \cdot 10^{-3}$	$-42,1 \cdot 10^{-3}$	$43,9 \cdot 10^{-3}$	
7	δc [mm]	0	65,9	-102,5	87,6	-155,1	
8	δd [mm]	0	46,2	-21,7	82,5	-27,9	
9		2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
10	δa	$-34,1 \cdot 10^{-3}$	$-45,9 \cdot 10^{-3}$	$-34,1 \cdot 10^{-3}$	$-45,9 \cdot 10^{-3}$	$-34,1 \cdot 10^{-3}$	$-45,9 \cdot 10^{-3}$
11	δb	$57,4 \cdot 10^{-3}$	$86,0 \cdot 10^{-3}$	$57,4 \cdot 10^{-3}$	$86,0 \cdot 10^{-3}$	$57,4 \cdot 10^{-3}$	$86,0 \cdot 10^{-3}$
12	δc [mm]	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9
13	δd [mm]	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4
14		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E		
15	δa	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$-25,8 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$-40,4 \cdot 10^{-3}$		
16	δb	$-27,6 \cdot 10^{-3}$	$29,9 \cdot 10^{-3}$	$-42,1 \cdot 10^{-3}$	$43,9 \cdot 10^{-3}$		
17	δc [mm]	65,9	-102,5	87,5	155,2		
18	δd [mm]	46,2	-21,7	82,5	27,9		
19		1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
20	δa	0	0	0	0	0	0
21	δb	0	0	0	0	0	0
22	δc [mm]	0	0	0	0	0	0
23	δd [mm]	0	0	0	0	0	0
24		3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
25	δa	0	0	0	0	0	
26	δb	0	0	0	0	0	
27	δc [mm]	0	0	0	0	0	
28	δd [mm]	0	0	0	0	0	
29		2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
30	δa	$-0,1 \cdot 10^{-3}$	$-4,0 \cdot 10^{-3}$	$-4,5 \cdot 10^{-3}$	$-38,4 \cdot 10^{-3}$		
31	δb	$-0,1 \cdot 10^{-3}$	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$-9,4 \cdot 10^{-3}$		
32	δc [mm]	0	4,4	-19,8	-54,0		
33	δd [mm]	0,7	8,8	1,1	74,9		

6. Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych przetransformowanych pomiędzy różnymi wariantami obliczeń.

Tabela 3

Lp.	Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych pomiędzy wariantami w [mm]					
1	2	3	4	5	6	7
1	1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2	1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3	1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4		1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	0	0,6 ÷ 9,8	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
6	2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
7	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9
8		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E	
9		4-5/B	4-5/C	4-5/D	4-5/E	
10		0,6 ÷ 9,9	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
11	1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
12	0	0	0	0	0	0
13	3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
14	0	0	0	0	0	
15	2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
16	0 ÷ 0,3	0,1 ÷ 1,8	0,5 ÷ 4,9	0,6 ÷ 17,5		

7. Wnioski

1. Wpływ wyboru modelu funkcjonalnego nie uwidacznia się w wynikach transformacji jeśli przyjęta zostanie jednakowa macierz wag dla współrzędnych wtórnych punktów dostosowania i gdy współczynnik proporcjonalności k średnich błędów współrzędnych w podzbiorach $\mathbf{W}_1 = \mathbf{w}_1$ oraz $\mathbf{W}_2 = \mathbf{w}_2$ punktów dostosowania, dla modelu I, będzie jednakowy
czyli gdy

$$\mathbf{P}_{w_1} = k \mathbf{P}_{W_1} ; \quad \mathbf{P}_{w_2} = k \mathbf{P}_{W_2}$$

Stąd też różnice wyników transformacji współrzędnych, w wariantach podanych w tabeli 3, lp. 11 ÷ 14, są równe zero.

2. Niewielkie zmiany współrzędnych przetransformowanych wystąpiły pomiędzy wariantami obu modeli, podanymi w tabeli 3, l.p. 15, kol. 2 i 3, gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych w modelu I, są 3 ÷ 4 razy mniejsze od średnich błędów współrzędnych wtórnych punktów dostosowania (tabela 1, poz. 12 i 13). Różnice współrzędnych przetransformowanych w tym przypadku obejmują przedział 0 ÷ 1,8 mm (tab. 3, lp. 16, kol. 2 i 3).

3. Istotne zmiany w wartościach współrzędnych wystąpiły w obu modelach gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych punktów dostosowania są większe od średnich błędów współrzędnych wtórnych tych punktów. W przykładzie obliczeniowym wielokrotność zmian średnich błędów wynosiła $1,3 \div 2,0$ (tab. 1, lp. 14 i 15). Różnice współrzędnych przetransformowanych pomiędzy wariantami podanymi w tabeli 3, lp. 15, kol. 4 i 5 mieszczą się w przedziale $(0,5 \div 17,5)$ mm, a więc w praktyce nie powinny być zanedbywane. Należy zaznaczyć, że wniosek 2 i 3 jest słuszny przy założeniu zróżnicowania współczynnika proporcjonalności wag współrzędnych pierwotnych i wtórnych przynajmniej dla 2 podzbiorów współrzędnych obejmujących nie identyczne punkty w obu układach.

4. Na podstawie wniosku 3 można stwierdzić, że wybór modelu może być istotny dla wyników transformacji współrzędnych gdy występuje zróżnicowanie stosunku wag współrzędnych w podzbiorach punktów dostosowania dla układów pierwotnego i wtórnego. Szczególnie to zróżnicowanie uwidacznia się gdy wagi współrzędnych pierwotnych są mniejsze od wag współrzędnych w układzie wtórnym.

5. Przy porównywaniu wyników obliczeń wariantu 1 z pozostałymi można stwierdzić, że zróżnicowanie wag współrzędnych ma wpływ na wartości przetransformowanych współrzędnych z wyjątkiem przypadków gdy wielokrotności zmian wag są jednakowe dla wszystkich współrzędnych punktów dostosowania w obrębie zbioru wtórnego i oddzielnie - pierwotnego (tab. 5, lp. 1 ÷ 5, kol. 2). Można także zauważyć, że jednakowe wyniki przetransformowanych współrzędnych uzyskujemy dla porównywanych wariantów, w których wagi, w tych samych podzbiorach współrzędnych, zróżnicowane są w jednakowej proporcji, tj. $\mathbf{P}_{\bar{w}_2} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1} = \mathbf{P}_{\bar{w}_2} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1} = k$ - dla modelu I i $\mathbf{P}_{\bar{w}_2} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1} = k$ - dla modelu II. Wniosek ten wynika z porównania danych w kolumnach 3 ÷ 6 tabeli 3 obejmujących lp. 1 ÷ 5, z uwzględnieniem błędów średnich podanych w tabeli 1, dla analizowanych wariantów.

6. W prezentowanym przykładzie liczbowym zróżnicowanie wag, w stosunku do wariantu, w którym wagi wszystkich współrzędnych są jednakowe (wariant 1 i 4), powoduje maksymalną zmianę współrzędnych przetransformowanych rzędu 21,3 mm zarówno w pierwszym jak i drugim modelu funkcjonalnym (por. lp. 5 i 10 w tab. 3).

7. Wyniki obliczeń zamieszczone w tabeli 3, lp. 7 określają wpływ zamiany wag w podzbiorach, w dwu wariantach obliczeń i oraz j , na zmianę wartości przetransformowanych współrzędnych.

Jeśli średnie błędy współrzędnych w podzbiorach, brane do obliczenia wag, spełniają proporcję:

$$m_{\overline{w_1}}^i : m_{\overline{w_1}}^j = m_{\overline{w_1}}^i : m_{\overline{w_1}}^j = m_{\overline{w_2}}^j : m_{\overline{w_2}}^i = m_{\overline{w_2}}^j : m_{\overline{w_2}}^i = q \quad - \text{ dla modelu I}$$

$$\text{ i } m_{\overline{w_1}}^i : m_{\overline{w_1}}^j = m_{\overline{w_2}}^j : m_{\overline{w_2}}^i = q \quad - \text{ dla modelu II}$$

to dla $q = 2$ maksymalne różnice współrzędnych wynoszą 24 mm, natomiast dla $q = 3$ różnice w przetransformowanych współrzędnych w obu wariantach dochodzą do 34,9 mm.

Wyniki te mogą także wskazywać na wpływ niedokładnego oszacowania średnich błędów współrzędnych w poszczególnych podzbiorach, na rezultaty transformacji.

8. Jeśli w transformacji współrzędnych stosujemy model II i przyjmujemy jednakowe wagi dla wszystkich punktów dostosowania, to w przypadku, gdy w rzeczywistości, przynajmniej w jednym podzbiorze średnie błędy różnią się dwukrotnie to maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 14,2 mm, natomiast przy trzykrotnym zróżnicowaniu średnich błędów maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 21,3 mm. Wynika z tego, że niezależnie od wyboru modelu transformacji wagi współrzędnych wtórnych mają wpływ na wyniki przetransformowanych współrzędnych.

8. Literatura

- [1] Osada E.; *Analiza, wyrównanie i modelowanie geodanych*. Wydawnictwo Akademii Rolniczej we Wrocławiu, 1998.

Dziękuję
za uwagę